LinAlg PVK HS20 05.01.21:

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \underbrace{\boxed{-1}}_{=0} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad , \underline{\underline{Q}} \text{ orth.}, \underline{\underline{R}} \text{ r.o.d.}$$

i) $a_{21} \to 0$

ii)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{\boxed{\cdot}}_{a_{31}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \to \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

iii)

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}$$

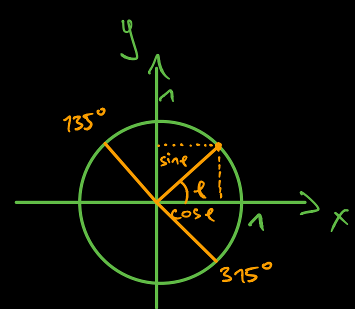
$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$$

iv) $-\sin\varphi - \cos\varphi \overset{!}{=} 0$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 0° = 0 = \cos 90°$$
$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$$
$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$
$$\sin 60° = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$
$$\sin 90° = 1 = \frac{\sqrt{4}}{2} = \cos 0°$$



v) $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$, $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}}$ $\leftarrow$

vi) i)-v) für das nächste Element wiederholen $\Rightarrow G_2$

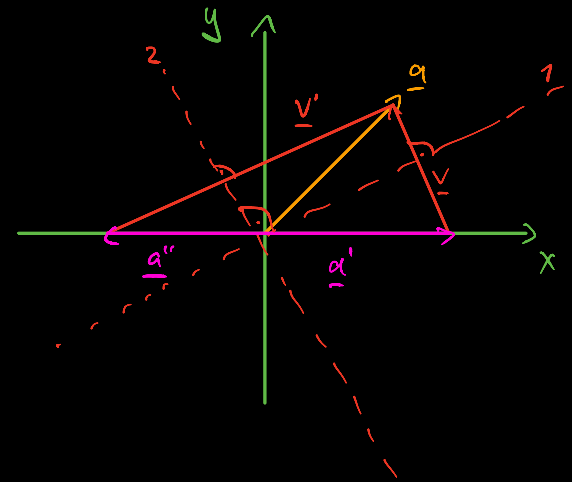
$$\Rightarrow \underline{\underline{G}}_2 \big(\underbrace{\underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}}_{R'}\big) = \underline{\underline{R}} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{G}}_2 \underline{\underline{G}}_1)^T$$

$$= \underline{\underline{G}}_1^T \underline{\underline{G}}_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$

$\underline{a}$



i) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $\underline{a}' = \underbrace{\|\underline{a}\|}_{3} \cdot \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $\underline{v} = \underline{a} + \underline{a}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{H = I - 2\,\frac{\underline{v}\,\underline{v}^T}{\underline{v}^T\underline{v}} = I - 2\,\underline{u}\,\underline{u}^T} \qquad \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

iv) $\underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

v) $\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}}$

vi) $\underline{\underline{H}}_1 \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -3 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}'$

vii) i) - vi) mit $\begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{bmatrix}$ auf $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H}}_2'$

$$\underline{\underline{H}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{H_2'} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H}}_2 (\underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1)^T = \underline{\underline{H}}_1^T \underline{\underline{H}}_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ \underline{\underline{A}} \in V \mid \underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}} \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Überprüfen $\forall U_1, U_2 \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $(U_1+U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1+U_2)$ ✓

(ii) $(\alpha U_1)^T = U_1^T \alpha^T = \alpha U_1^T = -(\alpha U_1)$ ✓

Basis beweisen:

Beispiel: $\mathcal{P}_2$, $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

1) $$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} c^{(1)} \\ x &= \frac{c^{(3)} - 2c^{(2)} - c^{(1)}}{-7} \\ x^2 &= \frac{c^{(3)} + 5c^{(2)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7} \end{aligned}\right\}$$

C ist ein Erzeugendensystem & minimal, da es nur 3 Vektoren sind und $\mathcal{P}_2$ 3-dim. $\rightarrow$ Basis

2)
$$\begin{array}{ccc|c} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} & \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Rang} = 3$$

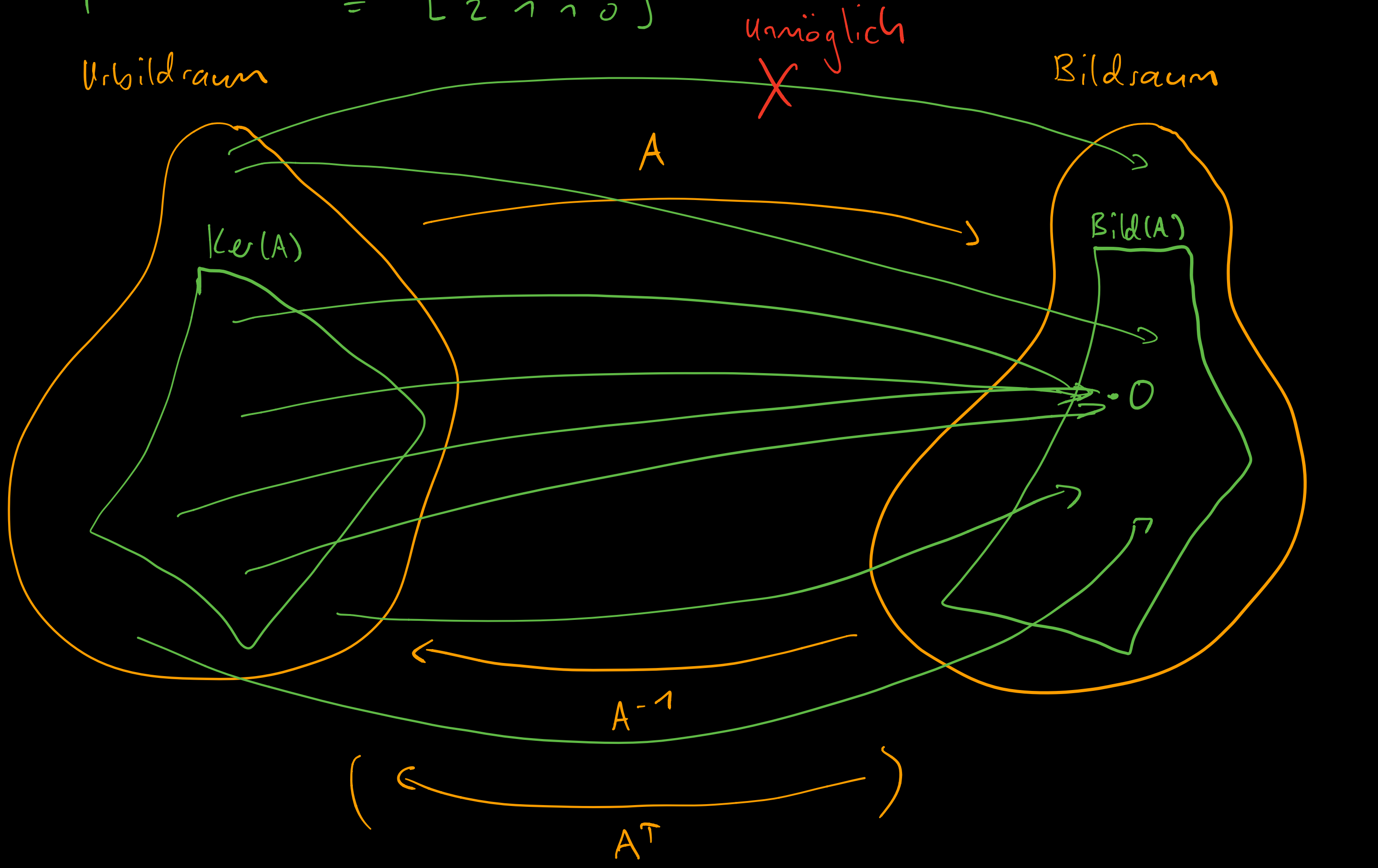
$\rightarrow$ lin. unabhängig

$\rightarrow$ ES $\rightarrow$ Basis

Basis von Kern & Bild:

$$\underline{\underline{A}}\,x = b = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots$$

Beispiel: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



Ker(A): $Ax = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{3s-3t}{2} \\ x_1 = \dfrac{-x_3-x_2}{2} = \dfrac{t-3s}{4} \end{array}$$

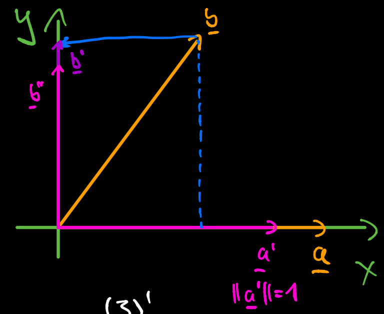
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} t-3s \\ 6s-6t \\ 4t \\ 4s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} t \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} s \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$ $\dfrac{a}{\|a\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: P_4 mit $\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

Gram-Schmidt:

i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = \underline{\underline{1}}$

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle 1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4\,dx$

$$= 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}}$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)\left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\right)dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$$= \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Induzierte Norm: $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{symm.}$$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle \overset{!}{=} \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$

$$x^T A \lambda (y+z) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \ \checkmark$$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

$$x^T A y = (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x \ \checkmark \quad \text{für } A \text{ symm.}$$

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

$$x^T A x \geq 0, \ x^T A x = 0 \iff x = 0 \ \checkmark$$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit $\iff$ Alle EW von $A > 0$

Hurwitz-Kriterium: (Nur für symm. Matrizen?)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(2) = 2 > 0, \quad \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$\Rightarrow A$ pos. def. nach Hurwitz?

A^k - Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$ falls A min. halbeinfach ist!

↳ T: Eigenvektoren von A

↳ D: Eigenwerte von A

$$= TD\underbrace{T^{-1}T}_{I}D\underbrace{T^{-1}T}_{I} \dots \underbrace{T^{-1}T}_{I}DT^{-1}x$$

$$= TD^kT^{-1}x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} \cdot \dots = \begin{bmatrix} d_1^k & & & \emptyset \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$= TD^k\underbrace{T^{-1}x}_{z}$$

$T^{-1}x = z$

$Tz = x$

$$= TD^kz$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10}x \overset{?}{=}$$

$$\text{EW: } \det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \qquad Ax = \lambda x$$

Laplace'scher Entwicklungssatz:

$$= -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 2\lambda - 2\right] + 2\left[2\lambda - 2\right] + \left[2\lambda + 4\right]$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2 - 2\lambda - 2\right] + 6\lambda = -\lambda\left[\lambda^2 - 2\lambda - 8\right]$$

$$= -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2) \qquad (\lambda \pm a)(\lambda \pm b)$$

$$\underline{\lambda_1 = 0}, \quad \underline{\lambda_2 = -2}, \quad \underline{\lambda_3 = 4}$$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{-2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\lambda_3 = 4 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = TD^{10}T^{-1}x = TD^{10}z \qquad Tz = x$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow z_3 = 0, \; z_2 = 2, \; z_1 = 1 \quad \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\ast} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} y(t) = e^{At} y_0$$

gekoppelt
$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots\dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$$y' = Ay = TDT^{-1}y$$ falls A min. halbeinfach

$$\underbrace{T^{-1}y'}_{z'} = D\underbrace{T^{-1}y}_{z}$$ $T^{-1}y = z$, $Tz = y$

$$z' = Dz$$

entkoppelt
$$\begin{cases} z_1' = d_1 z_1 \\ z_2' = \qquad d_2 z_2 \\ \vdots \\ z_n' = \qquad\qquad d_n z_n \end{cases}$$

Euler-Ansatz

$\longrightarrow$

$$z_1(t) = e^{d_1 t} c_1 = \underline{e^{\lambda_1 t}} c_1 \quad \Big| \; [z_1(t)]' = d_1 \underbrace{e^{d_1 t} c_1}_{z_1(t)}$$
$$z_2(t) = e^{d_2 t} c_2$$

$$z(t) = e^{Dt} z_0 \quad \Big| \; z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Tz(t) = Te^{Dt} z_0 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ t_1 \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ t_2 \\ | \end{bmatrix} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} | \\ t_n \\ | \end{bmatrix}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ → müssen über Anfangswerte oder Randwerte bestimmt werden (AWP)

Beispiel:

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $y' = Ay$

b) AWP: $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a)

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$= (3-\lambda) \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\left[\underbrace{(3-\lambda)(-6-\lambda)+18}_{-18}\right]$

$\underline{\lambda_1 = 3}$, $\underline{\lambda_2 = 0}$, $\underline{\lambda_3 = -3}$

EV:

$\lambda_1 = 3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{array}$

$\Rightarrow \underline{E_3 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$

$\Rightarrow \underline{E_0 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$, $\underline{E_{-3} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

b)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left(c_1 \underbrace{e^{3t}}_{\to\infty} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 \underbrace{e^{-3t}}_{\to 0} \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right)$$

$$\underline{c_1 = 0}, \quad \underline{c_2 = 1}, \quad c_3 \in \underline{\mathbb{R}}$$

$$y(0) = c_1 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}}} \quad , c_3 \in \mathbb{R}$$

oder

$$y = Tz = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\1 & 2 & 5\\0 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\c_3\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1+4c_3\\2+5c_3\\3+6c_3\end{bmatrix}}}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

~ 20 min

3.)

$e^A = T e^D T^{-1}$ falls A min. halbeinfach (gegeben, da symm?)

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^k T^{-1}}{k!}$$

$$= T \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \\ & \frac{d_2^2}{2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{d_n^2}{2} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^k}{k!} & & & \emptyset \\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_2^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_n^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ & & \ddots \\ \emptyset & & & e^{d_n} \end{bmatrix} = e^D$$

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[-\lambda - 1\right] + \left[\lambda + 1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{6} - 6\right]$$

$\underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$

$\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$

$\underline{\underline{\lambda_3 = 4}}$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_2 = x_3$, $x_1 = -2x_3$

$$E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$E_{-1} = \underline{\underline{\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}, \quad E_4 = \underline{\underline{\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

b) Da A symm. sind EV orth:

$$\underline{\underline{B = \{E_1, E_{-1}, E_4\}}}$$

oder

$$\underline{\underline{T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}}}$$

c) $e^A = T e^D T^T$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^4 & -2e + 2e^4 & -2e + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 \end{bmatrix}}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c**). Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

~35min + 4.)

$Ax = b$ $\qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$

$USV^T x = b$

$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

$\hat{S} V^T x = d_0 \qquad \to d_1 = r$: Residuum $\hat{=}$ Fehler

$x = V \hat{S}^{-1} d_0$

U, V orthogonal

$S = \operatorname{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{\sigma_i})$, λ_i: EW A^TA oder AA^T

U: EV von AA^T

V: EV von A^TA

$u^{(i)} = \dfrac{A v^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

$v^{(i)} = \dfrac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

a) $A^T A x = A^T b$

b)

$$V: A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW: } \det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\left(\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{(52-25\lambda)(73-25\lambda)}_{\overset{!}{=} 36^2} - \underbrace{36^2}_{(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)^2} \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = \underline{1}$: $27 \cdot 48$ $\qquad \lambda_1 = \underline{4}$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad = 36^2$ $\qquad \lambda_2 = \underline{1}$

$\lambda = 2$: $2 \cdot 23$ ↯

$\Rightarrow \sigma_1 = \underline{\underline{2}}$

$\lambda = 3$: $-23 \cdot -2$ ↯

$\sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

$\lambda = \underline{4}$: $(-48) \cdot (-27) = 36^2$

c) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\hat{S} \\ \\ \}0 \end{matrix}$ $\qquad \left(S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Kann auch passieren, falls ein Singulärwert } = 0 \text{ ist !} \right)$

V:

EV: $(A^T A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4$: $\frac{4}{3}\left(\begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = -\frac{3}{4} x_2 \end{array}$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}}$$

$\lambda_2 = 1$: $\frac{4}{3}\left(\begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = \frac{4}{3} x_2 \end{array}$

$$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\text{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\Rightarrow V = \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}$$

U:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d)

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$
$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ \hline -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \}\, d_1 \end{matrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(\text{Falls ein Singul.} = 0 \text{ ist:} \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \right)$$

Pseudo-Inverse

Null bleibt einfach Null

$$x = V \cdot \hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

~ 2-3 min 1.)

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} = 2 + 2\beta \overset{!}{=} 0 \qquad \beta = \underline{\underline{-1}}$

$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\alpha - 5 \overset{!}{=} 0 \qquad \alpha = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

b) A ist orth., geben sie A=QR an.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{R}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 + 1} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{16}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = \underbrace{|\det Q|}_{\pm 1} |\det R| = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y \right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

~ 20min

2.)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\
B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\
B_2 \arrow[r, "Q"] \arrow[u, "T"] & B_2 \arrow[u, "T"]
\end{tikzcd}$$

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$,

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right) x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 2y^2\,dy\right) x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

Zeigen Linearität von $\mathcal{F}$:

$\forall a(x), b(x) \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{F}(a(x) + b(x)) = \mathcal{F}(a(x)) + \mathcal{F}(b(x))$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a(x)) = \alpha\, \mathcal{F}(a(x))$

überprüfen i) & ii) zusammen:

$$\mathcal{F}(a + \alpha b) \overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha\,\mathcal{F}(b)$$

$$= [a(x) + \alpha b(x)] - \left(\int_0^1 y \cdot [a(y) + \alpha b(y)]'\,dy\right) \cdot x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y\,(a'(y) + \alpha b'(y))\,dy\right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y a'(y)\,dy + \alpha \int_0^1 y b'(y)\,dy\right) x$$

$$= a(x) - \left(\int_0^1 y a'(y)\,dy\right) x + \alpha \left[b(x) - \left(\int_0^1 y b'(y)\,dy\right) x \right] \quad \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] & P_3 \arrow[d, "k_1"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$$1 \xrightarrow{F} 1 = 1\,(1) + 0\,(x) + 0\,(x^2)$$

$$x \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2}\,x + 0\,x^2$$

$$x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x = 0 \cdot 1 - \frac{2}{3}\,x + 1\,x^2$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad F \cdot x = F\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) $B_2 = \{\underbrace{x-1}_{b^{(1)}}, \underbrace{x+1}_{b^{(2)}}, \underbrace{x^2-1}_{b^{(3)}}\} \subseteq P_3$

1) $$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \\ x &= \frac{b^{(1)} + b^{(2)}}{2} \end{aligned}\right\}$$

B_2 ist ein ES & minimal, da nur 3 Vektoren & P_3 3-dim. $\rightarrow$ Basis

$$x^2 = b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \Bigg)$$

2)
$$\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G} \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

Rang 3

lin. unabhängig

$\to$ ES $\to$ Basis

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1 \qquad B_1 \xrightarrow{S} B_2$

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & P_3 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\ B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "Q"] & B_2 \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

$$x-1 \xrightarrow{I} x-1 = -1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$$

$$x+1 \xrightarrow{I} x+1 = 1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$$

$$x^2-1 \xrightarrow{I} x^2-1 = -1 \cdot 1 + 0x + 1x^2$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q = T^{-1} F T$

$\neq T F T^{-1}$ ↯

(Falls Q gefragt ist:)

$B_2 \xrightarrow{Q} B_2$

Hier muss nichts gerechnet werden!

$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 =$ $(x-1)$ $(x+1)$ (x^2-1)

$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x + 1 =$ $(x-1)$ ... ...

$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$ ... ...

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top Ax < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

Zeit: ?

letzte Aufg.

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_i \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in (1,n)$

$\Rightarrow \exists \lambda_i < 0 \quad \square$

b) x EV zu λ_i:

$$x^T A x = x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0 \quad \square$$

c) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boxed{\lambda_i \ \& \ \overline{\lambda_i}}$

$\Rightarrow \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 > 0$

Schur-Zerlegung: $A = SRS^T$

S: orth.

R: obere rechte Dreiecksmatrix

A & R ähnlich

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S^T"'] & B \\ B' \arrow[r, "R"] & B' \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

$\det(A) = \det(R)$

a) $\det(R) = \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_i}_{<0\,!} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_{n/2} \overline{\lambda_{n/2}}}_{>0} < 0$

$\Rightarrow \exists \lambda_i < 0 \quad \square$

b) analog zu b)

x EV zu λ_i:

$$x^T A x = x^T \lambda_i x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{x^T x}_{>0} < 0$$